КАК ИЗБЕЖАТЬ ОШИБОК ПРИМЕНЕНИЯ ФОРМУЛ ГЕРЦА ПРИ РЕШЕНИИ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

Дорофеев В.Л. *(ФГУП "ЦИАМ им. П.И. Баранова"),*
E-mail: vld@ciam.ru

Формулы, полученные Генрихом Герцем в 1882 году, широко применяются для расчета самых разнообразных деталей машин.

Однако некорректное их применение может приводить к существенному завышению расчетной прочности машин и в итоге к их разрушению.

Рассмотрим пример расчета контактных напряжений в зубчатой передаче, имеющей следующие геометрические параметры колес: модуль m=3; угол исходного контура $\alpha = 33°$; модуль m=3; угол исходного контура $\alpha = 33°$. Число зубьев: $z_1 = 28$, $z_2 = 41$; $x_1 = 0.057$ $x_2 = -0.057$. Ширина зубьев: $w_1 = 35$ $w_2 = 32$. Кривизна профиля по высоте зубьев: $k_{11}=4.4\cdot 10^{-2}$, $k_{21}= 2.98\cdot 10^{-2}$. Отличительная особенность этой передачи – небольшая бочкообразная форма зубьев колеса: $C_2= 2{,}5$мкм. Зубья шестерни – не имеют бочкообразности по длине: $C_1 = 0$.

По известной глубине продольной модификации профиля зубьев, продольная кривизна k_{12} и k_{22} – определяется по формуле:

$$k_{12,22} = \frac{2\cdot C_{1,2}}{\left(\frac{\min(w_1, w_2)}{2}\right)^2 + C_{1,2}^2},$$

где C_1 и C_2 соответственно высоты, кругового сегмента с хордой равной минимальной ширине тел w_1 и w_2, определяющие продольную выпуклость или вогнутость продольных линий контакта.

Для расчета нормальных удельных давлений (контактных напряжений), распределенных по площади контактной поверхности соприкасающихся деталей машин, имеющих эллиптическую форму в месте контакта под действием заданной внешней нагрузки, используются две формулы Герца. Первая формула [1,с.162]:

$$\sigma_H(x,y) = \frac{3\cdot p}{2\cdot\pi\cdot a\cdot b}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}, \tag{1}$$

где $\sigma_H(x,y)$- удельное контактное давление (контактное напряжение) в точке с координатами x и y, относительно центра контактной площадки, p – суммарная нормальная внешняя нагрузка, распределенная по контактной площадке, a и b – соответственно большая и малая полуоси эллиптической площадки контакта.

Вторая формула, полученная Г. Герцем [2, стр. 457]:

$$\sigma_H(y) = \frac{2\cdot p'}{\pi\cdot b^2}\cdot\sqrt{b^2-y^2}, \tag{2}$$

где p' - нагрузка на единицу длины полосы контакта,

$$b = \sqrt{\frac{3 \cdot p' \cdot (\vartheta_1 + \vartheta_2)}{8 \cdot (k_{11} + k_{21})}} \quad .$$

В формулах (1) и (2) используются символика по книге [3].

Для нагрузки в однопарном зацеплении зубьев $\boldsymbol{p_n = 25000}$, [Н] максимальные контактные давления, вычисленные по первой формуле Герца при $C_1 = 0, C_2 = 2{,}5$мкм., будут равны 1149. МПа, а по второй формуле Герца при $C_1 = 0, C_2 = 0.$, будут равны 1453 МПа.

Применение второй формулы Герца представляется вполне обоснованным, поскольку бочкообразность по направлению настолько мала, что приближается к высоте микронеровностей. Результат же расчета по первой формуле Герца показывает, что несущая способность по контактной прочности может быть увеличена почти в два раза. Известны работы, в которых результаты таких расчетов трактуются как истина. В действительности, для случая малой кривизны в продольном направлении **имеет место недопустимо высокая погрешность расчета.**

На рис. 1 показаны результаты расчета контактных напряжений при различных значениях величины продольной модификации.

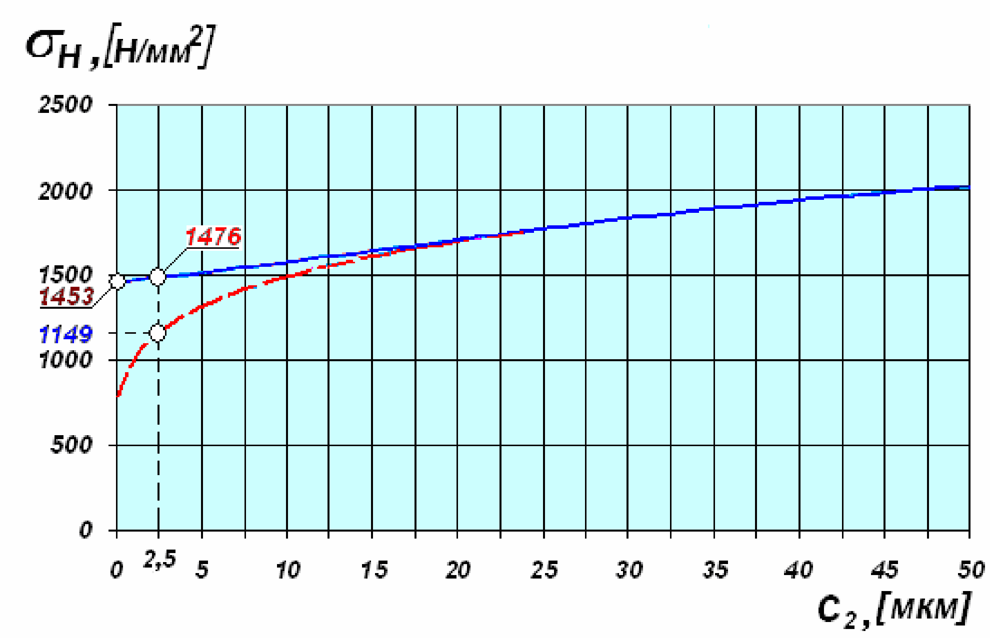

Рис. 1. Изменение контактных давлений (напряжений) в зависимости от величины продольной модификации зубьев колес; пунктирная линия – расчет по первой формуле Герца; сплошной линией показаны результаты расчета по обобщенной формуле (3), см. ниж.

Касательно затронутой проблемы Герц дает следующее разъяснение [1,с.160]: “Когда на поверхность тел ограниченных размеров действует вертикальное давление, оно ведет себя как тело бесконечных размеров, при этом необходимо, чтобы интеграл $\int Z_Z\, ds$, взятый по поверхности, ограниченной фигурой давления, определял суммарное давление p на тело”.

Этого разъяснения достаточно для внесения корректировок в первую формуле Герца. Расчет должен выполняться не путем расчета по формуле (1), а путем решения системы уравнений (3). При этом расчетное значение напряжений будет равно 1476 МПа. На рис. 1 это значение отмечено.

$$\begin{cases} F = \int\limits_{x=-a}^{x=a} \int\limits_{y=-y(x)}^{y=y(x)} \sigma_H(x,y)dxdy, \\ p = \int\limits_{\Delta S} \sigma_H(x,y)\,ds = \int\limits_{x=-\min(a,w')}^{x=\min(a,w'')} \int\limits_{y=-\min(y(x),h')}^{y=\min(y(x),h'')} \sigma_H(x,y)dxdy \end{cases}, \qquad (3)$$

где a и b – полуоси виртуальной площадки контакта,w', w'', h', h''- расстояния от центра виртуальной эллиптической площадки контакта до ближайших границ сопряженных контактирующих тел

Решается система уравнений (3), например, минимизацией функции

$$F:\ f(F_t) = \min\left\langle \left| p - \int\limits_{\Delta S} \sigma_H(F_t, x, y)ds \right| \right\rangle$$
$$F_t \subset [p, ..., M \cdot p)],$$

где F_t – текущее значение внешней силы, M - коэффициент, определяющий границы области поиска, он зависит от отношения виртуальной ширины площадки контакта к фактическому значению.

Объяснение причины ошибки

При малой кривизне контактирующих поверхностей расчетные границы площадки контакта выходят за пределы тела. Это приводит к тому, что рассчитывается не то тело, которое необходимо, а какое-то другое – большего размера. Соответственно получается меньшее значение контактных напряжений. При расчете контактных напряжений по формуле (3) размер контактной площадки не выходит за пределы тела. Сложность расчета многократно увеличивается, но это окупается правильностью результатов расчета.

Список литературы: 1. Ueber die Berührung fester elastischer Körper // Journal für die reine und angewandte Mathematik. Volume 1882, Issue 92 (Jan 1882), s.156-171. **2.** Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Harte Körper // Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes, Berlin: Verein zur Beförderung des Gewerbefleisses, 1882, S. 449-463. **3.** Расчеты на прочность в машиностроении. Том 2: Некоторые задачи прикладной теории упругости. Расчеты за пределами упругости. Расчеты на ползучесть // С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, К.К. Лихарев, и др. М.: Машгиз, 1958.— 974 с.